

Стохастические системы

© 2024 г. А.А. ГАЛЯЕВ, д-р техн. наук (galaev@ipu.ru),
Л.М. БЕРЛИН (berlin.lm@phystech.edu),
П.В. ЛЫСЕНКО, канд. физ.-мат. наук (pavellysen@ipu.ru),
В.Г. БАБИКОВ, канд. физ.-мат. наук (vl.babikov@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПОРЯДКОВЫЕ СТАТИСТИКИ НОРМИРОВАННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СЛАБЫХ СИГНАЛОВ В БЕЛОМ ШУМЕ¹

Развивается тематика предыдущих работ авторов, а именно исследуются порядковые статистики дискретного нормированного спектрального распределения аддитивного белого гауссовского шума для решения задачи обнаружения детерминированного сигнала в шумовой смеси с помощью информационных признаков. В данной работе не только устанавливается дополнительная связь между дискретным спектральным распределением статистики однооконной реализации белого шума, но и приводится новый результат, задающий формулы для точного вычисления математического ожидания и дисперсии нормированной порядковой статистики. На основе полученных аналитических результатов предложена новая формула вычисления спектральной сложности, а также уточнена уже известная. Теоретические результаты верифицированы статистическим численным моделированием.

Ключевые слова: порядковые статистики, обработка сигналов, преобразование Фурье, обнаружение сигналов в шуме.

DOI: 10.31857/S0005231024120039, EDN: XUIHKR

1. Введение

Задачи обнаружения детерминированных, хаотических и случайных сигналов привлекают внимание исследователей со времен изучения космических объектов [1, 2]. Основная сложность решения подобных задач заключается в неизвестных свойствах и характеристиках наблюдаемого сигнала. Поэтому зачастую периодичность повторения сигнала во времени считается признаком появления детерминированного сигнала. В дальнейшем по результатам наблюдений производится накопление и усреднение принятой энергии, делается вывод о наличии или отсутствии искомого сигнала [3].

Статистические основы теории обнаружения и классификации сигналов в шуме были заложены в 50–60-е гг. XX в. [4]. Методы машинного обучения позволили, в свою очередь, решать задачи классификации, основываясь

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-19-00134).

на выделении множества отдельных признаков [5]. На протяжении последних 30–40 лет в научной литературе появляются результаты исследований, в которых в качестве критериев обнаружения и классификации используются информационные характеристики временных или спектральных распределений. Поскольку энтропия или информация являются нечувствительными к перестановке дискретных отчетов распределений, то взор научного сообщества направлен на исследование распределений порядковых статистик и описание их свойств [6, 7]. Энтропию и связанные с ней величины в последние годы часто применяют в анализе электроэнцефалографии (ЭЭГ) и мозговой активности [8]. Другим примером использования сигнальной энтропии и связанной с ней спектральной сложности является задача классификации сигналов, как показано в [5, 9]. В последние годы порядковые статистики нашли применение в генеративных нейронных сетях [10] и связанных с ними расстоянием Вассерштайна и теорией оптимального транспорта [11, 12].

Зачастую в задачах обнаружения сигналов предполагается известным сигнал, который требуется обнаружить [13], однако на практике также популярной является задача предобнаружения, когда важно, например, определить наличие детерминированного сигнала в белом шуме [14, 15].

Текущая статья направлена на установление статистических закономерностей при однооконных наблюдениях белого шума и исследование эволюции этих закономерностей при появлении сигнала в смеси. Как результат должен появиться новый инструмент для решения задачи обнаружения, а в дальнейшем и задачи классификации, сигнала при малом отношении сигнал/помеха.

Статья имеет следующую структуру. Раздел 2 приводит математическую постановку задачи и исходные положения, необходимые для дальнейшего изложения. В разделах 3 и 4 содержатся основные аналитические результаты работы, а именно леммы и утверждения, связанные с нахождением математического ожидания и дисперсии нормированных порядковых статистик спектрального распределения белого шума при обработке наблюдений одного прямоугольного окна. В разделе 5 вводятся новые информационные характеристики сигналов, основанные на полученных аналитических результатах. В разделе 6 приводятся результаты численного моделирования, подтверждающие теоретические выкладки предыдущих разделов. Раздел 7 завершает изложение и подводит итоги статьи.

2. Исходные положения

Задача обнаружения сигнала $s(n)$ традиционно сводится к задаче различения двух гипотез [15]

$$\begin{cases} \Gamma_0 : x(n) = w(n), \\ \Gamma_1 : x(n) = s(n) + w(n), \quad n = 1, \dots, 2N + 2. \end{cases}$$

Гипотеза Γ_0 связана с принятием решения о приеме только шума, а гипотеза Γ_1 – о приеме смеси полезного сигнала и шума, где последовательно-

сти $\{x(n)\}$, $n = 1, \dots, 2N + 2$ – временной ряд из принятых данных, $\{s(n)\}$ – полезный сигнал, $\{w(n)\}$ – аддитивный случайный шум, $2N + 2$ – длина временного ряда данных. Случайные величины временного ряда $(x(1), \dots, x(n), \dots, x(2N + 2))$ принимают значения $(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{2N+2}) \in \mathbb{R}^{2N+2}$.

Для получения аналитического выражения оценки вероятности ошибки различения гипотез можно применить одну из разновидностей леммы Неймана–Пирсона, в которой для функции ошибок справедлива точная формула следующего вида:

$$(1) \quad \mathcal{E}r(N; \Gamma_0, \Gamma_1) = 1 - \frac{1}{2} \|P_0^{(N)} - P_1^{(N)}\| = 1 - TV(P_0, P_1),$$

где $P_0^{(N)}$ – многомерная функция распределения статистики наблюдений по гипотезе Γ_0 , $P_1^{(N)}$ – многомерная функция распределения статистики наблюдений по гипотезе Γ_1 , а $TV(P_0, P_1)$ – полная вариация меры со знаком, $\|Q\| = 2 \sup_A |Q(A)|$. Таким образом, если множества-носители мер P_0, P_1 не пересекаются, то возможно безошибочное различение гипотез. Если же меры $P_0^{(N)}$ и $P_1^{(N)}$ близки, то $\|P_0^{(N)} - P_1^{(N)}\| \approx 0$, и тогда $\mathcal{E}r(N; \Gamma_0, \Gamma_1) \approx 1$.

Поскольку особенность задачи состоит в обнаружении детерминированного сигнала при малом отношении сигнал/помеха, а именно при $\mathcal{E}r(N; \Gamma_0, \Gamma_1) \approx 1$, на основе анализа спектральных свойств принимаемой сигнально-шумовой смеси и информационных критериев, то в работе [16] сформулирована следующая задача.

Задача 1. Пусть имеется реализация $\{x_1, \dots, x_{2N+2}\}$ последовательности независимых случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_{2N+2}\}$ с нулевым математическим ожиданием, к которой применено дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

$$(2) \quad X_k = \sum_{n=1}^{2N+2} x_n e^{-2i\pi k(n-1)/(2N+2)},$$

определяющее случайную величину

$$(3) \quad \Xi_k = \sum_{n=1}^{2N+2} \xi_n e^{-2i\pi k(n-1)/(2N+2)},$$

где $k = 0, \dots, N$, поскольку в силу свойства симметрии ДПФ вещественного сигнала вторая половина из $N + 1, \dots, 2N + 1$ комплексных амплитуд спектральных отсчетов комплексно сопряжена с первой.

Требуется найти дискретную функцию вероятности нормированного упорядоченного спектрального распределения $\eta_k(N)$ как нормированное среднее для каждого k -го значения случайной величины

$$(4) \quad \eta_k(N) = \frac{(\mathbf{T}I)_k}{E_X},$$

где $I_k = \Xi_k \Xi_k^*$ (квадрат модуля амплитуды или энергия спектрального отсчета), E_X – половина энергии сигнала, а \mathbf{T} – оператор упорядочивания ряда в порядке невозрастания, и исследовать свойства полученного распределения на различных информационных мерах.

Для решения задачи 1 в общем случае требуется уметь находить

$$(5) \quad \mathbb{E}[\eta_k(N)] = \mathbb{E} \left[\frac{(\mathbf{T}I)_k}{E_X} \right].$$

А. Шустером в 1898 г. было установлено, что распределения случайных величин I_k при $k = 1, \dots, N$ являются экспоненциальными, а при одном значении $k = 0$ удовлетворяют распределению χ^2 с одной степенью свободы. Этот факт справедлив при условии того, что случайные величины ξ_n , $n = 1, \dots, 2N + 2$ – независимые нормально распределенные с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_0^2 , как показано в [17].

Замечание 1. Общее количество отсчетов сигнала во временной области выбрано равным $2N + 2$ для удобства анализа энергий I_k половины спектральных отсчетов, только N из которых являются экспоненциально распределенными величинами.

В статье в качестве критерия для решения задачи обнаружения используется информационная характеристика – сложность, представленная в виде произведения энтропии и \mathcal{L}_1 -нормы двух распределений. При этом энтропия, являясь только функцией от дискретного спектрального распределения, не чувствительна к перестановке его отсчетов, а сложность, являясь функцией уже от двух распределений, чувствительна к перестановке при вычислении относительно неравномерного распределения. Поэтому при постулировании порядка следования отсчетов в дискретном распределении устанавливается правило для вычисления и самих информационных характеристик. В качестве такого правила будем использовать упорядочение по возрастанию или убыванию отсчетов спектра.

3. Основные результаты. Вычисление математического ожидания нормированных порядковых статистик

Для математического ожидания порядковой статистики, нормированной на сумму отсчетов, справедлива следующая

Лемма 1. Пусть z_1, \dots, z_N – результаты наблюдений случайной величины Z , имеющей экспоненциальное распределение $F(z) = 1 - \exp(-z)$ и плотность $f(z) = \exp(-z)$. Рассмотрим значения последовательности $z_{(1)}, \dots, z_{(N)}$ тех же результатов, но расположенных в порядке возрастания, где случайная величина $Z_{(k)}$ является неубывающей k -й порядковой статистикой.

Тогда математическое ожидание такой величины, нормированной на сумму всех элементов выборки, имеет вид

$$(6) \quad \mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{z_k}{\sum_{i=1}^N z_i} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N}{\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N}.$$

Доказательство. Лемма проверяется непосредственно записью математического ожидания для порядковой статистики.

Отличие формулы (6) от известных заключается в вычислении среднего величины $\frac{z_k}{\sum_{i=1}^N z_i}$ по совместному распределению порядковых статистик $Z_{(1)}, \dots, Z_{(N)}$. Затруднение вызывает вычисление интеграла в числителе (6), преодолеть которое помогает связь между искомым математическим ожиданием $\mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right]$ и $\mathbb{E}[Z_{(k)}]$.

Плотность распределения для k -й порядковой статистики $Z_{(k)}$ по определению задается следующим образом:

$$f_{Z_{(k)}}(z) = \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} f(z) [F(z)]^{k-1} [1-F(z)]^{N-k}.$$

При подстановке экспоненциального закона $F(z)$ эта плотность принимает явный вид

$$(7) \quad f_{Z_{(k)}}(z) = \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} \exp(-z(1+N-k))(1-\exp(-z))^{k-1}.$$

Следующая формула является известным результатом [7] для нахождения математического ожидания порядковых статистик из стандартного экспоненциального закона:

$$(8) \quad \mathbb{E}[Z_{(k)}] = \int_0^\infty z f_{Z_{(k)}}(z) dz = \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i}.$$

С другой стороны, это математическое ожидание может быть найдено по формуле, предложенной в лемме 1, а именно

$$(9) \quad \mathbb{E}[Z_{(k)}] = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty z_k \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N}{\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N} =$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{N-k} \frac{1}{i} = \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i}.$$

Утверждение 1. Математическое ожидание нормированной порядковой статистики (6) равно

$$(10) \quad \mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] = \frac{1}{N} \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i},$$

что в точности до множителя $\frac{1}{N}$ совпадает со значением $\mathbb{E}[Z_{(k)}]$.

Доказательство. Повторный интеграл в знаменателе аналитически вычисляется при произвольном верхнем пределе последнего из них

$$\int_0^a \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N = \frac{1}{N!} + O(a^{N-1} \exp(-a)).$$

Переходя к пределу при $a \rightarrow \infty$, получаем, что

$$(11) \quad \int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N = \frac{1}{N!}.$$

Этот же результат можно было получить и другим способом, заметив, что

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N = 1.$$

В то же время этот интеграл состоит из суммы $N!$ (по количеству перестановок z_i , $i = 1, \dots, N$) интегралов вида (11).

Исследуем теперь интеграл в числителе выражения (10). Повторный интеграл в числителе аналитически вычисляется при произвольном верхнем пределе последнего из них

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \frac{z_k}{\sum_{i=1}^N z_i} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N = \\ & = \frac{1}{N!} \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{N-k} \frac{1}{i} \right) + O(a^N \exp(-a)) + O(a^{N+1} \text{Ei}(1, a)), \end{aligned}$$

где $\text{Ei}(1, a) = \int_1^\infty t^{-1} \exp(-ta) dt$.

Переходя к пределу при $a \rightarrow \infty$, получаем результат утверждения 1.

В разделе 4 будет предложен метод для вычисления дисперсии нормированной порядковой случайной величины, который также может быть использован для доказательства утверждения 1.

Одновременно были получены несколько интересных результатов при вычислении повторных несобственных интегралов, а именно:

$$(12) \quad \int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \exp\left(-\sum_{i=1}^N z_i\right) dz_1 dz_2 \dots dz_N = \frac{1}{N!},$$

$$(13) \quad \int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \frac{1}{\sum_{i=1}^N z_i} \exp\left(-\sum_{i=1}^N z_i\right) dz_1 dz_2 \dots dz_N = \frac{1}{N-1} \frac{1}{N!},$$

$$(14) \quad \int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N z_i\right)^2} \exp\left(-\sum_{i=1}^N z_i\right) dz_1 dz_2 \dots dz_N = \frac{1}{N-2} \frac{1}{N-1} \frac{1}{N!},$$

которые могут быть вычислены благодаря следующему утверждению.

Утверждение 2. Для произвольной натуральной степени p при условии $N - p \geq 1$ справедливо:

$$(15) \quad M(p, N) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N z_i\right)^p} \exp\left(-\sum_{i=1}^N z_i\right) dz_1 dz_2 \dots dz_N = \\ = \frac{(N-p-1)!}{(N-1)!}.$$

При $p \geq N$ этот интеграл не имеет смысла, поскольку расходится. Кроме того, для произвольной натуральной степени p выполнено

$$(16) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^N z_i\right)^p \exp\left(-\sum_{i=1}^N z_i\right) dz_1 dz_2 \dots dz_N = \frac{(N+p-1)!}{(N-1)!}.$$

Доказательство. Замена переменных в интегралах (15) и (16) $\{z_i\}_{i=1}^N \rightarrow \{x_i\}_{i=1}^N$ производится по следующему правилу [18]:

$$(17) \quad x_1 = \frac{z_1}{x_N}, \dots, x_{N-1} = \frac{z_{N-1}}{x_N}, \quad x_N = \sum_{i=1}^N z_i.$$

Для нахождения якобиана $J(x_1, \dots, x_N)$ отображения (17) требуется выразить переменные $\{z_i\}_{i=1}^N$ через $\{x_i\}_{i=1}^N$:

$$z_1 = x_1 x_N, \dots, z_{N-1} = x_{N-1} x_N, \\ z_N = \sum_{i=1}^N z_i - \sum_{i=1}^{N-1} z_i = x_N - \sum_{i=1}^{N-1} x_N x_i = x_N \left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} x_i\right).$$

Якобиан отображения после элементарных преобразований приводится к определителю верхнетреугольной матрицы и равен $J(x_1, \dots, x_N) = x_N^{N-1}$. Поэтому интеграл (15) вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 M(p, N) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^N z_i \right)^{-p} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_N = \\
 &= \int_0^\infty x_N^{-p} x_N^{N-1} \exp(-x_N) dx_N \left(\int_0^1 \int_0^{x_{N-1}} \dots \int_0^{x_2} dx_1 \dots dx_{N-2} dx_{N-1} \right) = \\
 &= \int_0^\infty x_N^{-p} \frac{x_N^{N-1}}{\Gamma(N)} \exp(-x_N) dx_N \left(\Gamma(N) \int_0^1 \int_0^{x_{N-1}} \dots \int_0^{x_2} dx_1 \dots dx_{N-2} dx_{N-1} \right) = \\
 &= \int_0^\infty x_N^{-p} \frac{x_N^{N-1}}{\Gamma(N)} \exp(-x_N) dx_N \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 \dots dx_{N-1} = \frac{\Gamma(N-p)}{\Gamma(N)} = \frac{(N-p-1)!}{(N-1)!}.
 \end{aligned}$$

Аналогично происходит нахождение интеграла (16). Далее остается заметить, что интеграл вида (15) состоит из $N!$ одинаковых интегралов вида (13) при $p = 1$.

Приведем еще один интересный математический результат, касающийся вычисления интеграла вида (13).

Лемма 2. Для любого $N \in \mathbb{N}$ интеграл (15) при $p = 1$ может быть представлен в некотором виде относительно разбиения на две части, состоящих из k и $N - k$ элементов, а именно

$$(18) \quad M(1, N) = \frac{1}{\Gamma(N-k)\Gamma(k)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\zeta^{N-k-1} \eta^{k-1}}{\zeta + \eta} \exp(-(\zeta + \eta)) d\zeta d\eta.$$

Доказательство. Доказательство леммы можно провести, опираясь на две замены переменных в интеграле, подобно доказательству утверждения 2. Заметим только, что в этом случае, как и ранее по утверждению 2, $M(1, N) = \frac{1}{N-1}$.

4. Основные результаты. Вычисление дисперсии нормированных порядковых статистик

Теперь возникает задача вычисления дисперсии $\mathbb{D} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right]$, для нахождения которой необходимо уметь вычислять $\mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}^2}{(\sum_{i=1}^N Z_{(i)})^2} \right]$.

Утверждение 3. Искомое математическое ожидание может быть найдено следующим образом:

$$(19) \quad \mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}^2}{\left(\sum_{i=1}^N Z_{(i)} \right)^2} \right] = \frac{1}{N(N+1)} \mathbb{E} \left[Z_{(k)}^2 \right].$$

Доказательство. Математические ожидания в обеих частях равенства выписываются по определению с учетом порядка интегрирования:

$$\mathbb{E} \left[Z_{(k)}^2 \right] = N! \int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} z_k^2 \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N,$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}^2}{\left(\sum_{i=1}^N Z_{(i)} \right)^2} \right] = N! \int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \frac{z_k^2}{\left(\sum_{i=1}^N z_i \right)^2} \exp \left(- \sum_{i=1}^N z_i \right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N.$$

Выполняя замену переменных (17) в интегралах аналогично доказательству утверждения 2, продолжим соответствующие равенства

$$\mathbb{E} \left[Z_{(k)}^2 \right] = N! \int_0^\infty \int_\Omega \dots \int x_N^{N-1} x_k^2 x_N^2 \exp(-x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} dx_N =$$

$$= N! \int_0^\infty x_N^{N+1} \exp(-x_N) dx_N \int_\Omega \dots \int x_k^2 dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} =$$

$$= N(N+1)N! \int_0^\infty x_N^{N-1} \exp(-x_N) dx_N \int_\Omega \dots \int x_k^2 dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1},$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}^2}{\left(\sum_{i=1}^N Z_{(i)} \right)^2} \right] = N! \int_0^\infty \int_\Omega \dots \int x_N^{N-1} x_k^2 \exp(-x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} dx_N =$$

$$= N! \int_0^\infty x_N^{N-1} \exp(-x_N) dx_N \int_\Omega \dots \int x_k^2 dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1},$$

где буквой Ω обозначена область интегрирования для новых переменных x_1, \dots, x_{N-1} при указанной замене. В данном случае эта область является частью симплекса, возникающего при подобной замене при выводе распределения Дирихле из порождающих Гамма-распределений [19, 20].

Сравнивая выражения для $\mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}^2}{\left(\sum_{i=1}^N Z_{(i)} \right)^2} \right]$ и $\mathbb{E} \left[Z_{(k)}^2 \right]$, получаем искомое утверждение.

Метод, предложенный выше, подходит и для доказательства утверждения 1.

Следствие 1. Из утверждения 3 с учетом формулы (10) следует, что дисперсия имеет вид

$$(20) \quad \mathbb{D} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] = \frac{1}{N(N+1)} \mathbb{E} \left[Z_{(k)}^2 \right] - \left(\frac{1}{N} \mathbb{E} \left[Z_{(k)} \right] \right)^2.$$

Теперь можно произвести ее оценку.

Следствие 2. Для всех значений N справедлива оценка дисперсии (20), удовлетворяющая неравенству

$$\mathbb{D} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] \leq \frac{1}{N^2} \mathbb{D} \left[Z_{(k)} \right].$$

Доказательство. Из следствия 1 следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] &= \frac{1}{N(N+1)} \mathbb{E} \left[Z_{(k)}^2 \right] - \left(\frac{1}{N} \mathbb{E} \left[Z_{(k)} \right] \right)^2 = \\ &= \frac{1}{N^2} \mathbb{D} \left[Z_{(k)} \right] - \frac{1}{N^2(N+1)} \mathbb{E} \left[Z_{(k)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Утверждение 4. Второй момент и дисперсия неубывающей порядковой статистики находятся следующим образом:

$$(21) \quad \mathbb{E} \left[Z_{(k)}^2 \right] = \left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i} \right)^2 + \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i^2},$$

$$(22) \quad \mathbb{D} \left[Z_{(k)} \right] = \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i^2}.$$

Доказательство. Для $\mathbb{E} \left[Z_{(k)}^2 \right]$ справедлива следующая формула [7]:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[Z_{(k)}^2 \right] &= \int_0^{\infty} z^2 f_{Z_{(k)}}(z) dz = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{z^2 N!}{(k-1)!(N-k)!} \exp(-z(1+N-k))(1-\exp(-z))^{(k-1)} dz = \\ &= (H_N - H_{N-k})^2 + \psi^{(1)}(N-k+1) - \psi^{(1)}(N+1), \end{aligned}$$

включающая полигамма-функцию $\psi^{(m)}(n) = (-1)^{(m+1)}m! \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{(m+1)}}$ и гармонический ряд $H_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i}$.

Подстановка в последнее равенство выражения $\psi^{(m)}(n)$ приводит к результату (21). Дисперсия (22) получается из (21) при учете формулы (8) для $\mathbb{E}[Z(k)]$.

Утверждение 5. Конструктивная формула для вычисления дисперсии (20) имеет вид

$$(23) \quad \mathbb{D} \left[\frac{Z(k)}{\sum_{i=1}^N Z(i)} \right] = \frac{1}{N(N+1)} \left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i^2} - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i} \right)^2 \right).$$

Доказательство. Преобразуем общую формулу (20) для дисперсии нормированной порядковой статистики, используя (21) и (10):

$$(24) \quad \begin{aligned} \mathbb{D} \left[\frac{Z(k)}{\sum_{i=1}^N Z(i)} \right] &= \frac{1}{N(N+1)} \mathbb{E} [Z_{(k)}^2] - \left(\frac{1}{N} \mathbb{E} [Z(k)] \right)^2 = \\ &= \frac{1}{N(N+1)} \left(\left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i} \right)^2 + \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i^2} \right) - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i} \right)^2 = \\ &= \left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i} \right)^2 \left(\frac{1}{N(N+1)} - \frac{1}{N^2} \right) + \frac{1}{N(N+1)} \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i^2} = \\ &= \left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i} \right)^2 \left(\frac{-1}{N^2(N+1)} \right) + \frac{1}{N(N+1)} \sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i^2} = \\ &= \frac{1}{N(N+1)} \left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i^2} - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=N-k+1}^N \frac{1}{i} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Приведем еще несколько интересных фактов из доказанных утверждений.

Следствие 3. Из (22) при $k = N$ следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{D} [Z_{(N)}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Следствие 4. Для всех значений N справедливо

$$\mathbb{E} [Z_{(1)}^2] = \frac{1}{N+1} \frac{2}{N^2}.$$

5. Среднее значение плотности нормированного энергетического спектра, его оценки и спектральная сложность

Вернемся к исходной задаче 1. После нахождения энергетических спектральных отсчетов одного окна наблюдения в [16] вводятся y_1, \dots, y_N – результаты наблюдений экспоненциально распределенной случайной величины Y , порождающей $\eta_k(N)$. Тогда значения последовательности $y_{(1)}, \dots, y_{(N)}$ тех же результатов, но расположенных в порядке убывания, являются обратным вариационным рядом, где случайная величина $Y_{(k)}$ является невозрастающей k -й порядковой статистикой.

В этом случае справедливо

$$\mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{Y_{(N-k+1)}}{\sum_{i=1}^N Y_{(i)}} \right],$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{n}_k(N) &= \mathbb{E} \left[\frac{Y_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Y_{(i)}} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{Z_{(N-k+1)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] = \\ (25) \quad &= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=k}^N \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Используя (25), получаем, что

$$\sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left[\frac{Y_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Y_{(i)}} \right] = N \frac{1}{N} = 1.$$

Откуда видно, что условие нормировки выполнено.

В свою очередь, дисперсия находится по формуле

$$\mathbb{D} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] = \mathbb{D} \left[\frac{Y_{(N-k+1)}}{\sum_{i=1}^N Y_{(i)}} \right],$$

или

$$(26) \quad \mathbb{D} \left[\frac{Y_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Y_{(i)}} \right] = \frac{1}{N(N+1)} \left(\sum_{i=k}^N \frac{1}{i^2} - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=k}^N \frac{1}{i} \right)^2 \right).$$

В [16] для приближенного вычисления функции вероятности нормированного упорядоченного дискретного спектра предложена формула

$$(27) \quad n_k(N) = -\frac{1}{NK_N} \ln \frac{k}{N+1}, \quad \text{где } K_N = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \frac{k}{N+1}.$$

Теперь сравним дискретные распределения: точное, задаваемое формулой (25), и приближенное, определяемое по формуле (27).

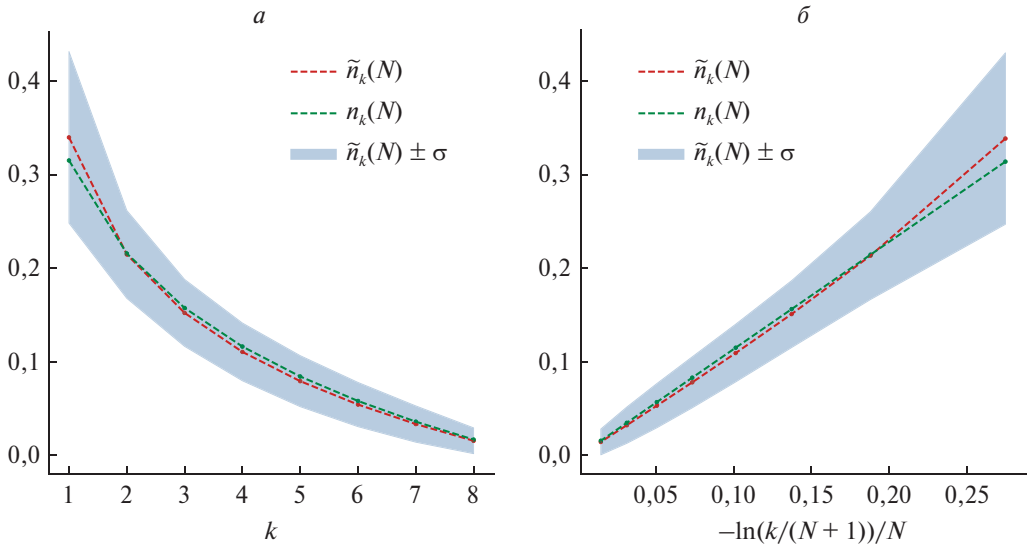


Рис. 1. Дискретные распределения $\tilde{n}_k(N)$ и $n_k(N)$ для ряда размера $N = 8$. *а* – горизонтальная ось в линейном масштабе. *б* – горизонтальная ось в логарифмическом масштабе.

При больших значениях N и k выражение (25), которое является разностью гармонических рядов, можно приближать различными способами. Выберем оценку

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \approx -\ln \frac{k}{N+1},$$

которая определена и имеет смысл при всех N и $k \in [1, \dots, N]$, а также входит в (27).

Проиллюстрируем на рис. 1, 2 графики зависимостей распределений (25) и (27) от номера отсчета. Буквой σ обозначено стандартное отклонение распределения порядковой статистики, определяемого формулой (26).

Рисунки 1 и 2 иллюстрируют, что точные значения математического ожидания (25) для малого количества точек (членов спектрального ряда) незначительно отличаются от распределения (27), для остальных отсчетов они практически совпадают. С ростом N доля точек, отклоняющихся от оценки, быстро падает.

Лемма 3. В общем случае более точной оказывается оценка

$$(28) \quad \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \approx -\ln \frac{k-0,5}{N+0,5},$$

которая также определена и имеет смысл при всех N и $k \in [2, \dots, N]$.

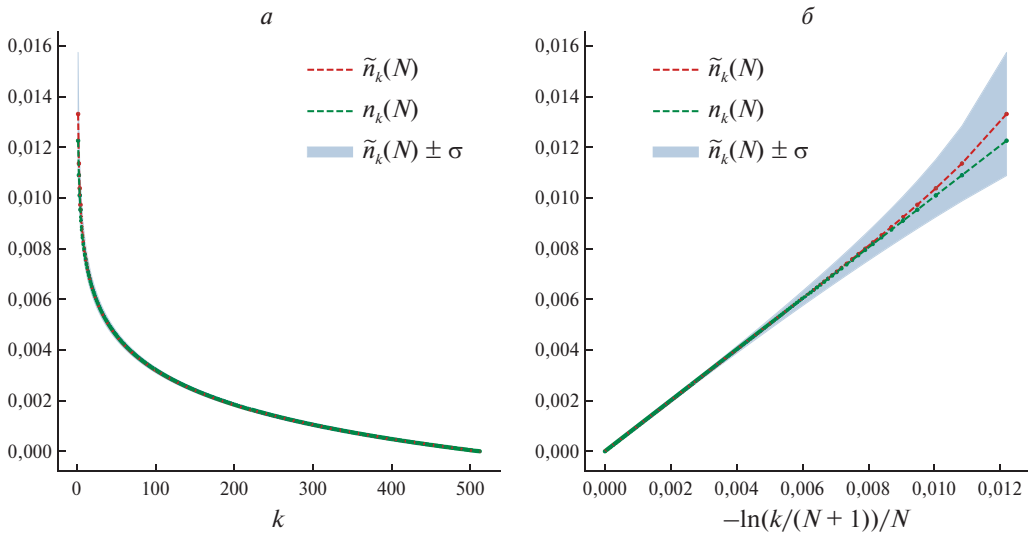


Рис. 2. Дискретные распределения $\tilde{n}_k(N)$ и $n_k(N)$ для ряда размера $N = 512$. *a* – горизонтальная ось в линейном масштабе. *б* – горизонтальная ось в логарифмическом масштабе.

Доказательство. Для доказательства обратимся к теории гармонических рядов.

Частичная сумма N первых членов гармонического ряда называется N -м гармоническим числом и описывается формулой

$$(29) \quad H_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N}.$$

В 1740 г. Эйлером было получено асимптотическое выражение для H_N , называемое формулой Эйлера–Макларена:

$$(30) \quad H_N = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \varepsilon_N,$$

где $\gamma = 0,5772\dots$ – постоянная Эйлера–Маскерони, а $0 \leq \varepsilon_N \leq 1/8N^2$, откуда следует, что при $N \rightarrow \infty$ значение $\varepsilon_N \rightarrow 0$, следовательно, для больших N

$$(31) \quad H_N = \ln N + \gamma + O(N^{-1}) \approx \ln N + \gamma.$$

Последнее выражение называется формулой Эйлера для суммы первых n членов гармонического ряда. Возвращаясь к (30), заметим, что

$$(32) \quad \ln \left(N + \frac{1}{2} \right) = \ln N + \frac{1}{2N} + O \left(\frac{1}{N^2} \right).$$

Подставляя правую часть в (30), можно получить

$$(33) \quad H_N = \ln \left(N + \frac{1}{2} \right) + \gamma + O \left(\frac{1}{N^2} \right),$$

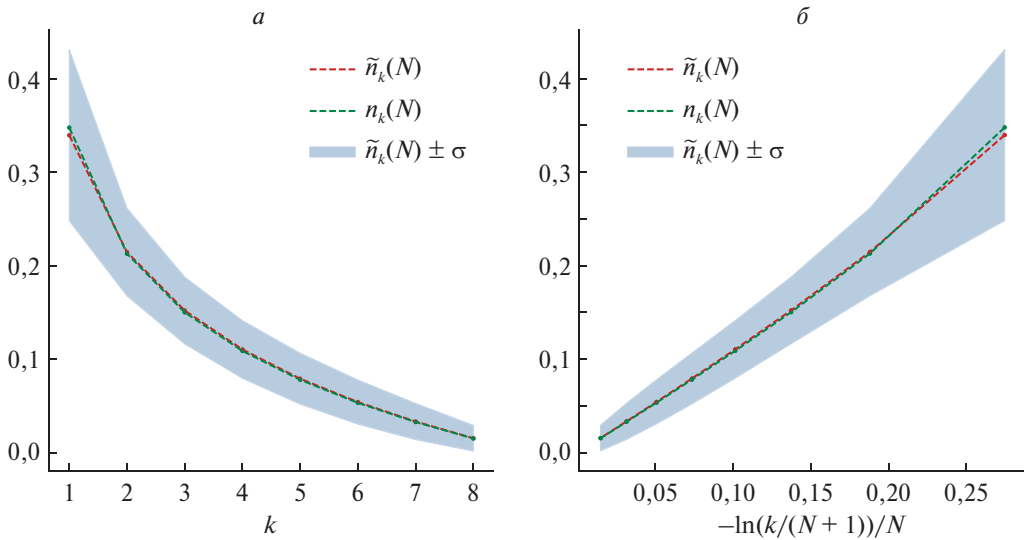


Рис. 3. Дискретные распределения $\tilde{n}_k(N)$ и $n_k(N)$ для ряда размера $N = 8$. *a* – горизонтальная ось в линейном масштабе. *б* – горизонтальная ось в логарифмическом масштабе.

поскольку величины ε_N и ε_{k+1} обладают близким порядком малости относительно $\frac{1}{N^2}$ и $\frac{1}{k^2}$, которые быстро стремятся к нулю при росте N и k .

Поэтому (28) принимает вид

$$\begin{aligned}
 (34) \quad & \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} = H_N - H_{k-1} = \\
 & = \ln\left(N + \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right) - \ln\left(k - \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{(k-1)^2}\right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, можно утверждать, что для относительно больших N и k справедливо выражение

$$(35) \quad \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \approx -\ln \frac{k-0,5}{N+0,5},$$

что завершает доказательство леммы.

Для приближенного вычисления функции вероятности нормированного упорядоченного дискретного спектра выберем теперь формулу

$$(36) \quad n_k(N) = -\frac{1}{NK_N} \ln \frac{2k-1}{2N+1}, \quad \text{где } K_N = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \frac{2k-1}{2N+1}.$$

Проиллюстрируем результат леммы на рис. 3 и 4.

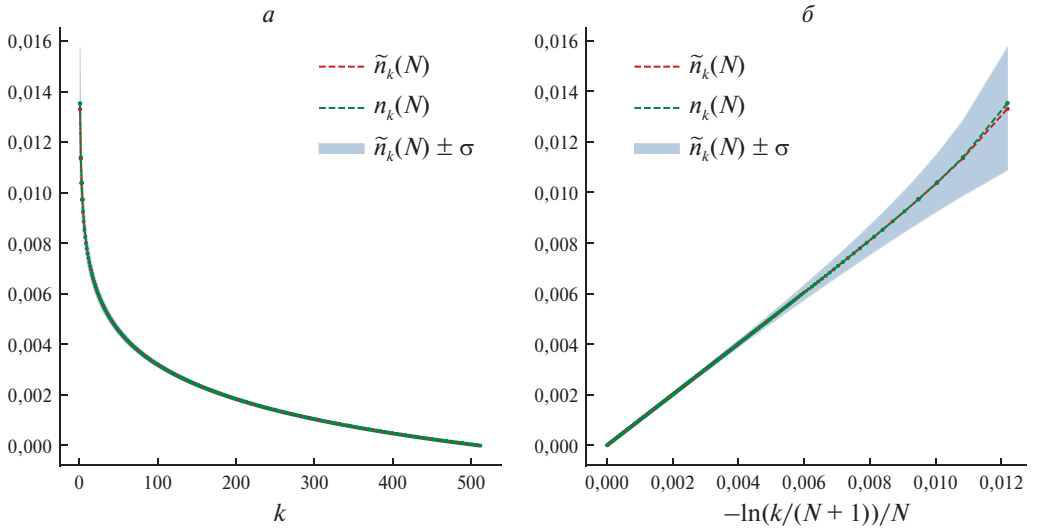


Рис. 4. Дискретные распределения $\tilde{n}_k(N)$ и $n_k(N)$ для ряда размера $N = 512$. *a* – горизонтальная ось в линейном масштабе. *б* – горизонтальная ось в логарифмическом масштабе.

Видно, что даже при малых N имеется практическое совпадение двух распределений. Теперь, считая что нормированные порядковые статистики (η_1, \dots, η_N) принимают значения $p = (p_1, \dots, p_N)$, спектральную сложность также можно задавать на основе распределения (25) по формуле

$$(37) \quad C_{SS}(p) = -\frac{1}{4 \log_2 N} \left(\sum_{k=1}^N p_k \log_2 p_k \right) \left(\sum_{k=1}^N |p_k - \tilde{n}_k(N)| \right)^2$$

или его приближенного аналога (36) по формуле

$$(38) \quad C_S(p) = -\frac{1}{4 \log_2 N} \left(\sum_{k=1}^N p_k \log_2 p_k \right) \left(\sum_{k=1}^N |p_k - n_k(N)| \right)^2,$$

что и показано в следующем разделе 6.

6. Моделирование обнаружения детерминированного сигнала

Для иллюстрации аналитических результатов статьи используем методику статистического моделирования, основанную на анализе сгенерированных численных данных и подробно описанную в предыдущей работе авторов [16]. Как и ранее, все численные результаты получены средствами языка Python и библиотек NumPy и Scipy.

Рассмотрим пары последовательностей данных, отвечающих двум гипотезам принятия сигнала

$$(39) \quad \begin{cases} \Gamma_0 : x_n = w_n, \\ \Gamma_1 : x_n = s_n + w_n, n = 1, \dots, N. \end{cases}$$

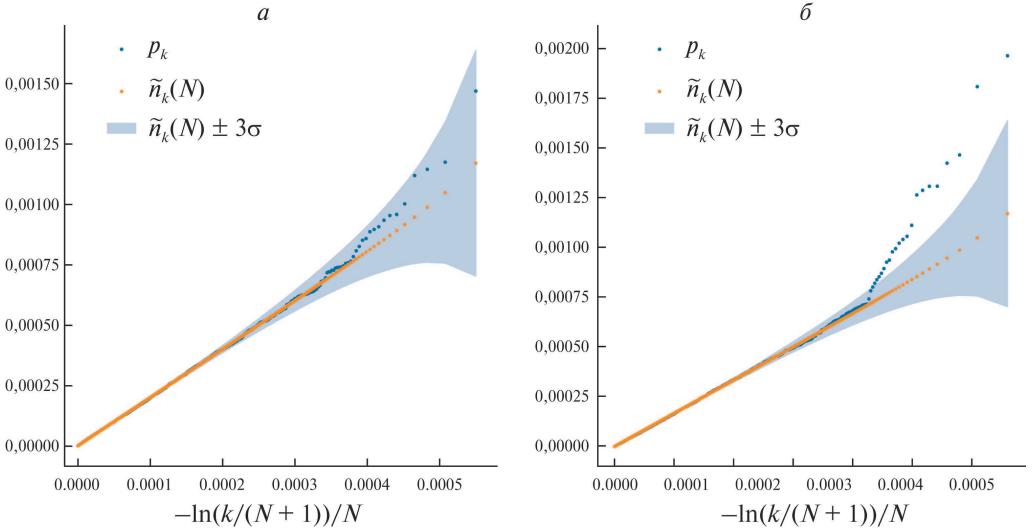


Рис. 5. Дискретные распределения $\tilde{n}_k(N)$ и p_k для ряда размера $N = 8192$ для $SNR = -15,22$ dB. Горизонтальная ось в логарифмическом масштабе. *a* – для временной последовательности данных шума w_n . *б* – для временной последовательности данных сигнала с шумом $s_n + w_n$.

Гипотеза Γ_0 связана с принятием решения о приеме только шума, а гипотеза Γ_1 – о приеме смеси полезного сигнала и шума, где последовательность $\{x_n\}$, $n = 1, \dots, N$ – временной ряд из принятых данных, $\{s_n\}$ – полезный сигнал, $\{w_n\}$ – аддитивный белый гауссовский шум, N – длина временного ряда данных (фрейма).

Для проверки качества разделения полезного детерминированного сигнала и шума была набрана статистика на $Q = 50\,000$ численно сгенерированных фреймах $\{x_n\}$ сигнально-шумовой смеси длины $2N = 16\,384$ с размером спектров $N = 8192$ соответственно. Во всех реализациях сигнал $\{s_n\}$ оставался одним и тем же, а именно фиксированным по количеству и амплитудам набором равномерно разнесенных по спектру $K = 30$ синусоид со случайными фазами. Аддитивный белый гауссовский шум $\{w_n\}$ был получен генератором гауссовских последовательностей со средним $\mu = 0$ и дисперсией Σ (в рамках одного набора Q фреймов).

На рис. 5 показаны упорядоченные дискретные спектральные распределения p_k для конкретных реализаций сигналов и теоретические математические ожидания $\tilde{n}_k(N)$, описываемые (25). Видно, что в каждой реализации реальное спектральное распределение белого шума может довольно сильно отличаться от теоретического $\tilde{n}_k(N)$. Однако можно утверждать, что все такие реализации лежат в доверительном интервале, определяемом стандартным отклонением σ распределения порядковой статистики (26). На рис. 5 голубым цветом показана область, ограничивающая доверительный интервал для каждого номера отсчета k с верхней и нижней границей $\tilde{n}_k(N) \pm 3\sigma$.

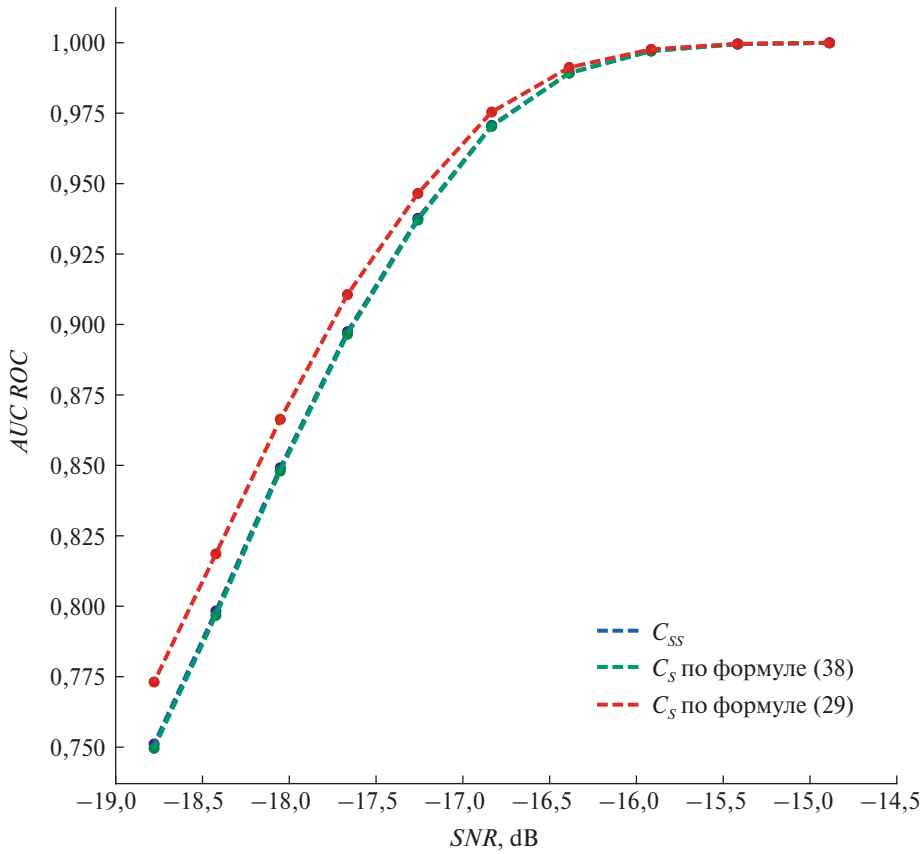


Рис. 6. Зависимость качества бинарной классификации $AUC ROC$ от отношения сигнал/помеха SNR для рассматриваемых функций спектральной сложности.

Для каждой полученной последовательности $\{x_n\}$ вычисляется порядковая статистика дискретного нормированного спектрального распределения p_k , вычисление которой подробно описано в [9, 15]. Далее на основании p_k вычисляются значения C_{SS} (37) и C_S (38) для шума и смеси шума с сигналом, отвечающим двум гипотезам из выражений (39). Величина C_S посчитана для двух разных приближений порядковой статистики спектрального распределения белого шума (27) и (36), поскольку их сравнение тоже представляет интерес.

Конечным результатом моделирования и сравнения вычисленных информационных метрик служит зависимость качества бинарной классификации $AUC ROC$ от отношения сигнал/помеха SNR , которое описывается формулой

$$(40) \quad SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{E_{signal}}{E_{noise}} \right),$$

где E_{signal} , E_{noise} – полные энергии сигнала и шума соответственно, рассчитанные как сумма мощностей спектрального разложения последовательностей $\{s_n\}$ и $\{w_n\}$.

Для получения такой зависимости для ряда значений дисперсий шума Σ набирается статистика Q фреймов, описанная выше, и по ней строятся гistogramмы распределений величин C_{SS} и C_S , по которым затем вычисляются значения *AUC ROC* [16].

На рис. 6 показано сравнение качества бинарного разделения сигнала и шума для информационных метрик C_{SS} и C_S . Видно, что показатели для функций C_{SS} и C_S , которая вычислена с использованием (36), теоретически обусловленной леммой 3, совпадают почти полностью. Также видно, что информационная характеристика C_S , вычисленная с использованием формулы (36) из предыдущей статьи авторов [16], показывает небольшое улучшение в качестве обнаружения. Все аналитические информационные критерии, введенные в работе, демонстрируют высокое качество обнаружения детерминированного сигнала в шуме при малом отношении сигнал/шум.

7. Заключение

В работе установлено, что порядковая статистика дискретного нормированного спектрального распределения является мощным инструментом для решения задачи обнаружения детерминированного сигнала при малом отношении сигнал/помеха при однооконном наблюдении. В качестве критерия обнаружения используется спектральная сложность, вычисляемая на конкретной реализации сигнально-шумовой смеси.

При попытке разделить две задачи «обнаружение (предобнаружение) детерминированных сигналов в белом шуме при малом отношении сигнал/помеха» и «классификация» видно, что, повышая чувствительность метода обнаружения, теряем все физические свойства сигнала, работая в дальнейшем только с информационными. Напрашивается простая аналогия с квантовыми системами, для которых существует соотношение неопределенности, когда исследователь не может точно одновременно измерить скорость и координату. В действительности уменьшение информативности конкретных частот сигнала не позволяет его классифицировать, не говоря уже о том, чтобы восстановить его из измерения совместно с шумом. Однако упорядоченность спектра шума имеет конкретную жесткую структуру, позволяющую делать вывод о присутствии сигнала даже за пределами чувствительности классических энергетических приемников.

Более того, видны перспективы применения предлагаемого метода обнаружения и для других видов шума, а также перспективы построения классификационных сеток сигналов на основе информационных характеристик спектров сигнально-шумовых смесей, чему и будут посвящены следующие работы авторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Amigó J.M., Rosso O.A.* Ordinal methods: Concepts, applications, new developments, and challenges – In memory of Karsten Keller (1961–2022) // *Chaos*. 2023. V. 33. No. 8. P. 080401.
<https://pubs.aip.org/cha/article/33/8/080401/2905538/Ordinal-methods-Concepts-applications-new>
2. *Rosso O.A., Larrondo H.A., Martin M.T., Plastino A., Fuentes M.A.* Distinguishing Noise from Chaos // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99. No. 15. P. 154102.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.154102>
3. *Теребиж В.Ю.* Анализ временных рядов в астрофизике. М.: Наука, 1992.
4. *Добрушин Р.Л., Пинскер М.С., Ширяев А.Н.* Применение понятия энтропии в проблемах обнаружения сигнала на фоне шума // Литовский математический сборник. 1963. Т. 3. № 1. С. 107–122.
5. *Chen Z., Wu C., Wang J., Qiu H.* Tsallis Entropy-Based Complexity-IPE Casualty Plane: A Novel Method for Complex Time Series Analysis // *Entropy*. 2024. V. 26. No. 6. P. 521. <https://www.mdpi.com/1099-4300/26/6/521>
6. *Hoeffding W.* On the Distribution of the Expected Values of the Order Statistics // *Ann. Math. Stat.* 1953. V. 24. No. 1. P. 93–100.
<https://doi.org/10.1214/aoms/1177729086>
7. *Balakrishnan N., Cohen A.C.* Order Statistics & Inference: Estimation Methods // Elsevier Science. 1991. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-22411-1>
8. *Vecchio F., Miraglia F., Pappalètera C., Orticoni A., Alù F., Judica E., Cotelli M., Rossini P.M.* Entropy as Measure of Brain Networks' Complexity in Eyes Open and Closed Conditions // *Symmetry*. 2021. V. 13. No. 11. P. 2178.
<https://www.mdpi.com/2073-8994/13/11/2178>
9. *Berlin L.M., Galyaev A.A., Lysenko P.V.* Comparison of Information Criteria for Detection of Useful Signals in Noisy Environments // *Sensors*. 2023. V. 23. No. 4. P. 2133. <https://www.mdpi.com/1424-8220/23/4/2133>
10. *Zhang W., Huang D., Zhou M., Lin, J., Wang X.* Open-Set Signal Recognition Based on Transformer and Wasserstein Distance // *Appl. Sci.* 2023. V. 13. No. 4. P. 2151. <https://www.mdpi.com/2076-3417/13/4/2151>
11. *Cazelles E., Robert A., Tobar F.* The Wasserstein-Fourier Distance for Stationary Time Series // *IEEE Transact. Signal Proc.* 2021. V. 69. P. 709–721.
<https://ieeexplore.ieee.org/document/9303405>
12. *Ferracuti F., Freddi A., Monteriu A., Romeo L.* Fault Diagnosis of Rotating Machinery Based on Wasserstein Distance and Feature Selection // *IEEE Transact. Autom. Sci. Engin.* 2022. V. 19. No. 3. P. 1997–2007.
<https://doi.org/10.1109/TASE.2021.3069109>
13. *Quan Z., Zhang W., Shellhammer S.J., Sayed A.H.* Optimal Spectral Feature Detection for Spectrum Sensing at Very Low SNR // *IEEE Transact. Commun.* 2011. V. 59. No. 1. P. 201–212. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2010.112310.090306>
14. *Bardenet R., Flamant J., Chainais P.* On the zeros of the spectrogram of white noise // *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 2020. V. 48. No. 2. P. 682–705.
<https://doi.org/10.1016/j.acha.2018.09.002>
15. *Галляев А.А., Лысенко П.В., Берлин Л.М.* Статистическая сложность как критерий задачи обнаружения полезного сигнала // *АиТ*. 2023. № 7. С. 121–145.
<https://doi.org/10.31857/S0005231023070073>

16. *Галляев А.А., Бабиков В.Г., Лысенко П.В., Берлин Л.М.* Новая спектральная мера сложности и ее возможности по обнаружению сигналов в шуме // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2024. Т. 518. С. 80–88.
17. *Richards M.A.* The Discrete-Time Fourier Transform and Discrete Fourier Transform of Windowed Stationary White Noise // Technical Memorandum. 2013. P. 1–24.
18. *DasGupta A.* Probability for Statistics and Machine Learning: Fundamentals and Advanced Topics // New York: Springer, 2011.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9634-3>
19. *Frigyik B., Kapila, A., Gupta M.* Introduction to the Dirichlet Distribution and Related Processes // UWEE Technical Report Number UWEETR-2010-0006. 2010. P. 1–28.
20. *Hafeez M., Kamal S., Shahbaz M.* The Multivariate Order Statistics for Exponential and Weibull Distributions // Pak. J. Stat. Oper. Res. 2014. V. 10. P. 361–368.
<https://doi.org/10.18187/pjsor.v10i3.825>

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 08.09.2024

После доработки 08.10.2024

Принята к публикации 24.10.2024